本次竞赛有三道题。每道题有a, b, c共3小题。

第一题：在下面所有小题中，我们不考虑退货。

a. “双十一”期间，一家电商店铺A有满60返5块的优惠券，可叠加使用（比如，买120块的东西，用两张优惠券，只需付120–5 $\times 2 = 110$块）。此外，电商平台全场提供满299返60的优惠券（可凑单），每单限用一张，可与店铺的优惠券叠加使用（比如，原价299块的一单，最终价格是$299 - 5 \times 4 - 60 = 219$。原价不满299则不能减去全场折扣60。不足299时，用户可以在别家商店凑单。）

   请问：小明打算在这家店铺买一款250块的耳机和一款600块的音箱，怎么买最划算?

b. 现在您开了一家电商店铺，卖与A店同款的耳机和音箱，标价相同。您计划提供满99返x的优惠券，x为大于0、小于99的整数。与A店不同的是，您的优惠券每单限用一张（比如，买250块，需付$250-x$ 块，而不是 $250-2x$ 块）。“双十一”期间，电商平台全场满299返60仍然适用。

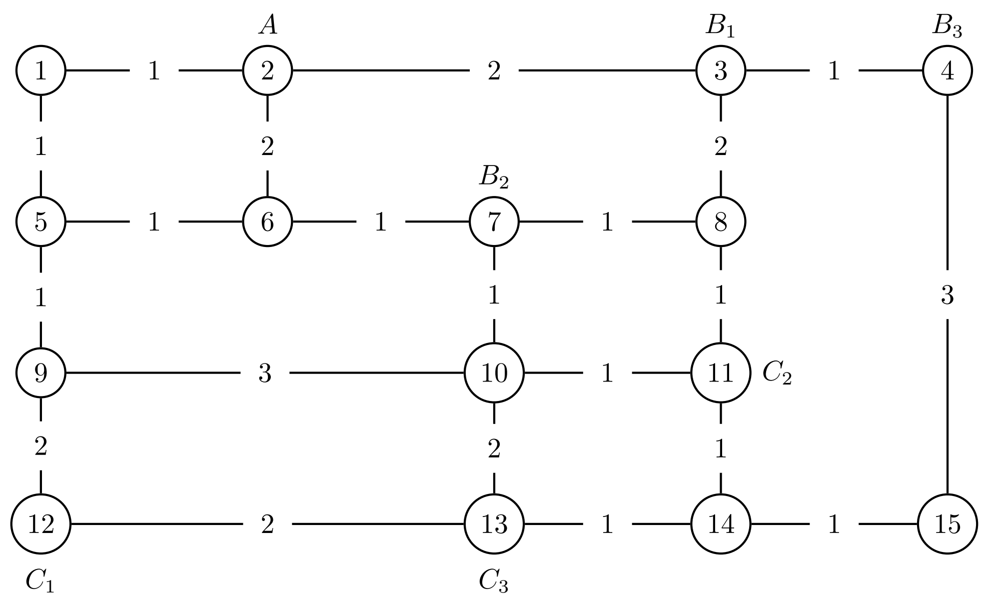
   请问：x 至少等于多少时，小明在您的店铺买耳机和音箱其中一种会更便宜 (至少1元)? 又请问：x 至少等于多少时，小明在您的店铺既买耳机又买音箱总和会更便宜（至少1元）?

c. 建模题。对比单卖和捆绑销售下的利润期望。假设耳机（产品1）和音箱（产品2）的单件销售的单位成本分别是c_1和c_2（包含生产、储存、运输、促销等所有成本）。一个访问店铺的客户对两件产品的心理价值分别是均匀分布在$[0, u_1]$和$[0, u_2]$的区间上随机变量S_1和S_2。假设S_1和S_2相互独立。本题有三小问。

   1. 如何分别设定产品价格p_1和p_2，以最大化每个到访客户带来的利润期望。这里假设$c_1 < u_1$；当且仅当$p_1 \leq S_1$时，客户会购买一件产品1；用户不买的话不计损失。对产品2做类似假设。请以公式形式给出最优价格p_1^*和p_2^*以及对应的最大利润期望r_1^*和r_2^*。
   2. 现在假设产品1和2捆绑销售，成本是$c_{12} = t(c_1 + c_2)$。因为节省了包装和运输成本，所以假设$0 < t < 1$。其余的条件不变。请以公式形式给出捆绑下的最优价p_{12}^*。
   3. 单卖和捆绑销售，哪个利润更优，还是不一定? 为什么?

第二题：

a. 附图中有一个无向图，其中圈内数字代表一个地点，边e上数字代表长度L_e（双向相同）。一位外卖小哥在起点A，要去3个商家（B_1, B_2, B_3）取餐，送到3个对应的地方（C_1, C_2, C_3），即B_1至C_1，B_2至C_2， B_3至C_3。小哥的电动助力车的箱子同时最多装下2份外卖。



请问： 小哥该怎么走最短路径？这个最短路径的长度是多少？这里，A是出发点，最后一餐（不限次序）送达地为终点。为了简化问题，假设商家已经备好了外卖，小哥取餐送餐不用等。又假设每份外卖重量大小一样。

b. 此题与上图无关，而是考虑一个一般的图，图中有很多点和边。外卖小哥刚刚取了一份外卖，计划经过图上的边$e_1, e_2, \ldots, e_m$送给目的地。途中经过每条边e的时候，以概率$P_e \in [0,1]$会收到至送相同地址的另一单外卖。（一个条边上收到另两单及以上的概率小，暂忽略不计。）

假设对应边$e_1, e_2, \ldots, e_m$的概率为$P_1, P_2, \ldots, P_m$。

请问： 送一次外卖，小哥平均能收到几个送去相同地址的新单（不考虑电动车的箱子容量）？小哥收到至少一个去相同地址的新单的概率是多少？

c. 此题延续上题，但不再固定路径，而是对路线进行优化。假设小哥每送一单外卖有固定收益r，但是总路径长度ℓ（途中经过的每边e的长度ℓ_e之和）是成本。总收益是$r - \ell$。（为了简化，这里设成本系数为1）。现在小哥刚刚出发，车上只有一份外卖，箱子最大容量仍设为两份外卖，请问怎么走能够最大化收益？（提示：这里不但要考虑路径长短，还要考虑可能收到送至相同地址的另一单外卖而带来的无额外成本的收益r。假设$0 \le P_e \le \min\{\ell_e/r, 1\}$）。

第三题：

a. 马教授的领域内有n个不同但是等价的逻辑陈述，$A_1, A_2, \ldots, A_n$，现在需要证明它们是等价的。每个学期，马教授选两个不同的陈述A_i和A_j，以"$A_i \Rightarrow A_j$"的证明作为研究课题，指导一位本科生完成。假设每个学期只完成一个证明。要注意的是，在"$A_i \Rightarrow A_j$"和"$A_j \Rightarrow A_k$"被证明之后，"$A_i \Rightarrow A_k$"也已经被（自动地）证明了，因此不能再作为一个新的课题

让学生去完成。总之，如果一个课题是之前若干学生已经完成课题的直接推论，则不能作为新课题再发给另一个学生。随着越来越多的推出关系被证明，剩下可选的课题也越来越少。请问，马教授可以最多依次指导多少个学生呢？为什么？

b. H是一个$n \times n$的方阵，其第i行第j列的元素是h_{ij}，所有$h_{ij} \in \{1, -1\}$，并且H的任意不同的两行看作向量是相互垂直的（即，它们的标准内积为0）。假设H有一个$a \times b$的子矩阵（$1 \leq a, b \leq n$），子矩阵内的元素均为1。请证明：$ab \leq n$。

c. G是一个群。e是该群的单位元。定义G的一个子集

$$F = \{h \in G \mid \text{存在自然数 } m \geq 1 \text{ 使得 } h^m = e\}。$$

假设集合F内的元素是有限多个的。证明：存在一个自然数 $n \geq 1$ 使得对所有 $g \in G$和$h \in F$, 我们都有

$$g^n h = h g^n。$$